Der Forward-Algorithmus

Kursfolien

Karin Haenelt

Zweck

Berechnung der Wahrscheinlichkeit
einer Beobachtung
nach einem Hidden Markov Model

Speichern und Wiederverwenden
partieller Zwischenergebnisse

Hidden Markov Model

Formal spezifiziert durch Fünf-Tupel (S, K, Π, A, B)

$S = \{s_1, \ldots, s_N\}$		Menge der Zustände
$K = \{k_1, \ldots, k_M\} = \{1, \ldots, M\}$		Ausgabe-Alphabet
$\Pi = \{p_i\}, i \in S$		Wahrscheinlichkeiten der Startzustände
$A = \{a_{ij}\}, \quad i, j \in S$	$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1$	Wahrscheinlichkeiten der Zustandsübergänge
$B = \{b_{ijk}\}, \quad i, j \in S, \quad k \in K$	$\sum_{k=1}^{M} b_{ijk} = 1$	Wahrscheinlichkeiten der Symbolemissionen

Manning/Schütze, 2000: 326

Notationskonventionen

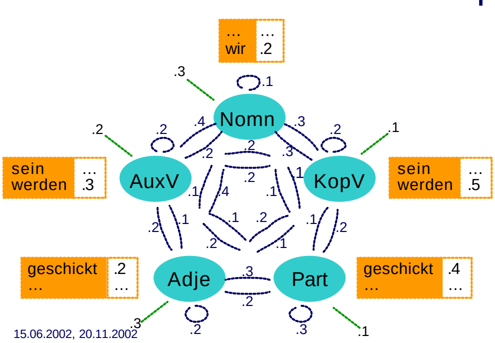
$X = (X_1, \ldots, X_{T+1})$ Sequenz der Zustände

$X_t : S \to \{1, \ldots, N\}$

$O = (o_1, \ldots, o_T), \quad o_T \in K$ Sequenz der Beobachtungen

Manning/Schütze, 2000: 324

Hidden Markov Model: Graph



Hidden Markov Model: Matrizen

ein Modell $m = (A, B, \Pi)$

Übergangs-Matrix A | Emissions-Matrix B | Start-Tabelle Π

	Adje	AuxV	KopV	Nomn	Part	g'schickt	werden	wir	p
Adje	.2	.1	.1	.4	.2	.2	0	0	.3
AuxV	.2	.2	.2	.2	.2	0	.3	0	.2
KopV	.2	.2	.2	.3	.1	0	.5	0	.1
Nomn	.1	.4	.3	.1	.1	0	0	.2	.3
Part	.3	.1	.2	.1	.3	.4	0	0	.1

Hidden Markov Model: Matrizen

Modellvariante:
mit Startsymbol
statt mit Tabelle der Startwahrscheinlichkeiten

	Adje	AuxV	KopV	Nomn	Part	Ω	g'schickt	werden	wir	.
Adje	.2	.1	.1	.4	.2	0	.2	0	0	0
AuxV	.2	.2	.2	.2	.2	0	0	.3	0	0
KopV	.2	.2	.2	.3	.1	0	0	.5	0	0
Nomn	.1	.4	.3	.1	.1	0	0	0	.2	0
Part	.3	.1	.2	.1	.3	0	.4	0	0	0
Ω	.3	.2	.1	.3	.1	0	0	0	0	1

Aufgabe: Wahrscheinlichkeit einer Beobachtung finden

gegeben eine Sequenz von Beobachtungen $O = (o_1, \ldots, o_T)$

O=(*wir,werden,geschickt*)

ein Modell $m = (A, B, \Pi)$

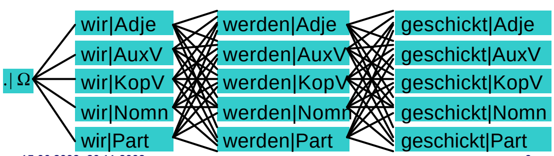
	Adje	AuxV	KopV	Nomn	Part	g'schickt	werden	wir	*p*
Adje	.2	.1	.1	.4	.2	.2	0	0	.3
AuxV	.2	.2	.2	.2	.2	0	.3	0	.2
KopV	.2	.2	.2	.3	.1	0	.5	0	.1
Nomn	.1	.4	.3	.1	.1	0	0	.2	.3
Part	.3	.1	.2	.1	.3	.4	0	0	.1

gesucht die Wahrscheinlichkeit $P(O \mid m)$

$P(wir, werden, geschickt \mid m)$

Forward-Lösung

- Kompakte Darstellung der Pfade als Gitter (Trellis)
- Wiederverwendung partieller Ergebnisse statt wiederholter Neuberechnung



Spezifikation des Algorithmus

Variante mit arc-emission HMM

1. Initialisierung

$$a_i(1) = p_i, \quad 1 \le i \le N$$

2. Induktion

$$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, \mathrm{a}_{ij}\, \mathrm{b}_{ijo_t}, \quad 1 \le i \le N, 1 \le j \le N$$

3. Gesamt

$$P(O \mid m) = \sum_{i=1}^{N} a_i(T+1)$$

Spezifikation des Algorithmus

Variante mit state-emission HMM

1. Initialisierung

$$a_i(1) = p_i, \quad 1 \le i \le N$$

2. Induktion

$$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t)\, \mathrm{a}_{ij}\, \mathrm{b}_{jo_t}, \quad 1 \le i \le N, 1 \le j \le N$$

3. Gesamt

$$P(O \mid m) = \sum_{i=1}^{N} a_i(T+1)$$

Gitter mit Zellen (s_i,t)

Variable $a_i(t)$ wird gespeichert in s_i(t)

repräsentiert die Wahrscheinlichkeit,
zum Zeitpunkt t im Zustand s_i zu sein
bei gegebenen Beobachtungen $o_1 \ldots o_{t-1}$

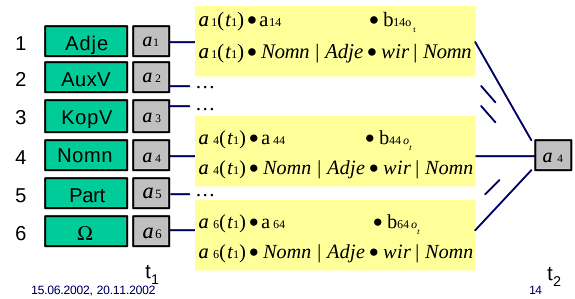
Gitter für das Beispiel

1	Adje	0	0	0	.000648
2	AuxV	0	0	.0072	0
3	KopV	0	0	.0090	0
4	Nomn	0	.06	0	0
5	Part	0	0	0	.000936
6	Ω	1	0	0	0
		.	wir	werden	geschickt
		t_1	t_2	t_3	t_4

0.001584

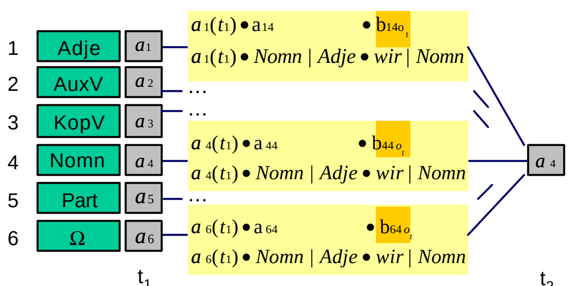
Berechnung für Zelle $a_4(t_2)$

mit arc-emission HMM



Berechnung für Zelle $a_4(t_2)$

mit state-emission HMM



Tracing für ausgewählte Zellen (t_2)

t_2

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} =$				$a_i(t)$		x a_{ij}		x $b_{ij\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
1	Adje	1	Adje	$a_1(1)$	0	Adje|Adje	.2	wir|Adje	0	0
		2	AuxV	$a_2(1)$	0	Adje|AuxV	.2	wir|Adje	0	0
		3	KopV	$a_3(1)$	0	Adje|KopV	.2	wir|Adje	0	0
		4	Nomn	$a_4(1)$	0	Adje|Nomn	.1	wir|Adje	0	0
		5	Part	$a_5(1)$	0	Adje|Part	.3	wir|Adje	0	0
		6	Ω	$a_6(1)$	1	Adje| Ω	.3	wir|Adje	0	0
a_{12} =										**0**

…

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} =$				$a_i(t)$		x a_j		x $b_{ij\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
4	Nomn	1	Adje	$a_1(1)$	0	Nomn|Adje	.4	wir|Nomn	.2	0
		2	AuxV	$a_2(1)$	0	Nomn|AuxV	.2	wir|Nomn	.2	0
		3	KopV	$a_3(1)$	0	Nomn|KopV	.3	wir|Nomn	.2	0
		4	Nomn	$a_4(1)$	0	Nomn|Nomn	.1	wir|Nomn	.2	0
		5	Part	$a_5(1)$	0	Nomn|Part	.1	wir|Nomn	.2	0
		6	Ω	$a_6(1)$	1	Nomn| Ω	.3	wir|Nomn	.2	.06
a_{42} =										**.06**

Tracing für ausgewählte Zellen (t_3)

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} =$				$a_i(t)$		x a_j		x $b_{j\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
1	Adje	1	Adje	$a_1(2)$	0	Adje|Adje	.2	werden|Adje	0	0
		2	AuxV	$a_2(2)$	0	Adje|AuxV	.2	werden|Adje	0	0
		3	KopV	$a_3(2)$	0	Adje| KopV	.2	werden|Adje	0	0
		4	Nomn	$a_4(2)$	.06	Adje|Nomn	.1	werden|Adje	0	0
		5	Part	$a_5(2)$	0	Adje|Part	.3	werden|Adje	0	0
		6	Ω	$a_6(2)$	0	Adje| Ω	.3	werden|Adje	0	0
a_{13} =										**0**

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} =$				$a_i(t)$		x a_{ij}		x $b_{j\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
2	AuxV	1	Adje	$a_1(2)$	0	AuxV|Adje	.1	werden|AuxV	.3	0
		2	AuxV	$a_2(2)$	0	AuxV|AuxV	.2	werden|AuxV	.3	0
		3	KopV	$a_3(2)$	0	AuxV|KopV	.2	werden|AuxV	.3	0
		4	Nomn	$a_4(2)$	.06	AuxV|Nomn	.4	werden|AuxV	.3	.0072
		5	Part	$a_5(2)$	0	AuxV|Part	.1	werden|AuxV	.3	0
		6	Ω	$a_6(2)$	0	AuxV| Ω	.2	werden|AuxV	.3	0
a_{23} =										**.0072**

Tracing für ausgewählte Zellen (t_3)

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N} =$				$a_i(t)$		x a_j		x $b_{ij\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
3	KopV	1	Adje	$a_1(2)$	0	KopV|Adje	.1	werden|KopV	.5	0
		2	AuxV	$a_2(2)$	0	KopV|AuxV	.2	werden|KopV	.5	0
		3	KopV	$a_3(2)$	0	KopV|KopV	.2	werden|KopV	.5	0
		4	Nomn	$a_4(2)$	.06	KopV|Nomn	.3	werden|KopV	.5	.009
		5	Part	$a_5(2)$	0	KopV|Part	.2	werden|KopV	.5	0
		6	Ω	$a_6(2)$	0	KopV| Ω	.1	werden|KopV	.5	0
a_{33} =										**.009**

Tracing für ausgewählte Zellen (t_4)

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N}$ =				$a_i(t)$		x a_{ij}		x $b_{j\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
1	Adje	1	Adje	$a_1(3)$	0	Adje|Adje	.2	geschickt|Adje	.2	0
		2	AuxV	$a_2(3)$	.0072	Adje|AuxV	.2	geschickt|Adje	.2	.000288
		3	KopV	$a_3(3)$	.0090	Adje|KopV	.2	geschickt|Adje	.2	.000360
		4	Nomn	$a_4(3)$	0	Adje|Nomn	.1	geschickt|Adje	.2	0
		5	Part	$a_5(3)$	0	Adje|Part	.3	geschickt|Adje	.2	0
		6	Ω	$a_6(3)$	0	Adje| Ω	.3	geschickt|Adje	.2	0
a_{14} =										**.000648**

…

$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{N}$ =				$a_i(t)$		x a_{ij}		x $b_{ij\ ot}$		
				vorige		aktuelle Beobachtung				
j		i				Übergang		Emission		
5	Part	1	Adje	$a_1(3)$	0	Part|Adje	.2	geschickt|Part	.4	0
		2	AuxV	$a_2(3)$	.0072	Part|AuxV	.2	geschickt|Part	.4	.000576
		3	KopV	$a_3(3)$	.0090	Part|KopV	.1	geschickt|Part	.4	.000360
		4	Nomn	$a_4(3)$	0	Part|Nomn	.1	geschickt|Part	.4	0
		5	Part	$a_5(3)$	0	Part|Part	.3	geschickt|Part	.4	0
		6	Ω	$a_6(3)$	0	Part| Ω	.1	geschickt|Part	.4	0
a_{54} =										**.000936**

Gesamtsumme

$$P(O \mid m) = \sum_{i=1}^{N} a_i(T+1)$$

P(*wir werden geschickt* | μ) = 0.001584

Berechnungsaufwand

2 N^2T Multiplikationen

Manning/Schütze, 2000: 327

Literatur

- Manning, Christopher D.; Schütze, Hinrich (1999): *Foundations of Statistical Natural Language Processing.* Cambridge, Mass., London: The MIT Press. (vgl.: http://www.sultry.arts.usyd.edu.au/fsnlp)